MAI 3 domácí úkol - metrické prostory:

1. Buď l_∞ množina všech omezených (nekonečných) posloupností reálných čísel.
   a) Ukažte, že l_∞ je normovaný prostor, definujeme-li normu prvku $x \in l_\infty$, $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, předpisem $\|x\| = \sup_{i \in n} |x_i|$.
   b) Je-li $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v metrickém prostoru (l_∞, d_∞), kde d_∞ je metrika, odvozená z normy v a), rozhodněte, zda platí (a odůvodněte) :
   (i) $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^{(0)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^{(0)}$ pro každé $i \in N$;
   (ii) $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^{(0)}$ pro každé $i \in N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^{(0)}$.
   c) Dokažte, nebo ukažte, že neplatí :
   Prostor (l_∞, d_∞) , je úplný metrický prostor.

nebo

1. Buď M množina všech posloupností reálných čísel $x = \{x_n\}$, pro které $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konverguje.
   a) Ukažte, že $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$, $x, y \in M$, $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ má vlastnosti metriky

   (pro tento metrický prostor se užívá se označení (l^2, d_2) (pokud jste toto už neřešili v dú 3).
   b) Zkuste ukázat, že metrický prostor (l^2, d_2) je úplný metrický prostor.

2. (Úloha 11. z 2. přednášky pana docenta Kalzara)
   Nechť (M, d) je metrický prostor a $X \subset M$. Dokažte, že množina X je uzavřená, právě když pro každou posloupnost $(a_n) \subset X$ platí: Má-li (a_n) limitu $a \in M$, pak $a \in X$.

3. (Úloha 1. z 3. přednášky pana docenta Kalzara)
   Formulujte Heineho definici spojitosti zobrazení mezi metrickými prostory a dokažte, že je ekvivalentní původní definici spojitosti z přednášky (přednáška 3., 1. úloha) .

4. Důkaz Banachovy věty o pevném bodu . (pokud jste důkaz už neodevzdali).